

## 物理問題 I

### (1) 車内で静止している小物体

$m \frac{V^2}{R}$

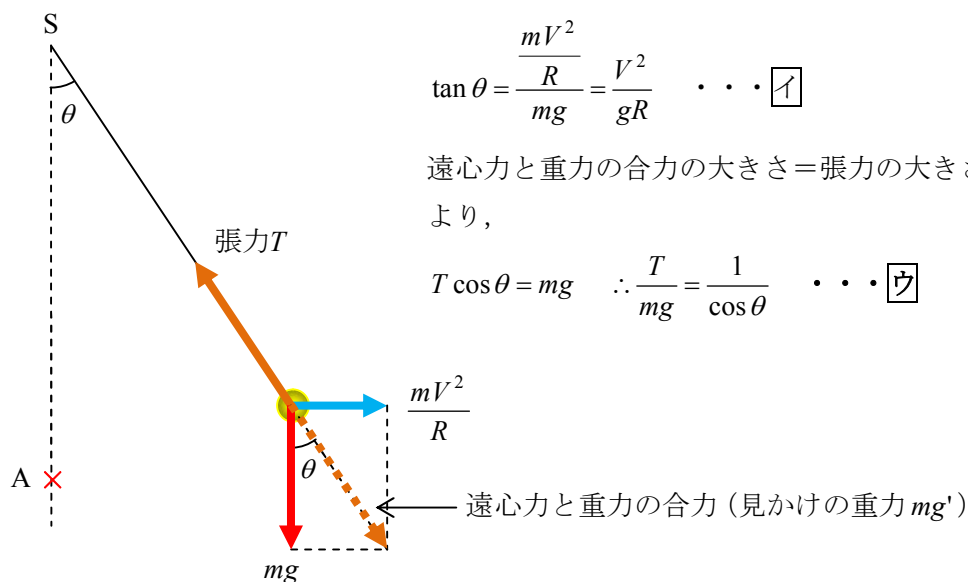
解説

「レールの幅、電車の高さは  $R$  に比べて非常に小さいとする」とあるから、小物体の等速円運動の回転半径は  $R$  としてよい。

$\frac{V^2}{gR}$       $\frac{1}{\cos \theta}$

解説

車内で静止している観測者が見た小物体は静止しているので、車内では小物体にはたらく力はつり合っている。



$$\tan \theta = \frac{\frac{mV^2}{R}}{mg} = \frac{V^2}{gR} \quad \dots \quad \text{イ}$$

遠心力と重力の合力の大きさ = 張力の大きさより、

$$T \cos \theta = mg \quad \therefore \frac{T}{mg} = \frac{1}{\cos \theta} \quad \dots \quad \text{ウ}$$

### (2) 車内で動いている小物体 ただし、速さは電車の速さ $V$ に比べ十分小さい

$\frac{1}{\cos \theta}$

解説

遠心力と重力の合力が見かけの重力  $mg'$  であり、これと張力がつり合っている。したがって、 $mg'$  が鉛直線  $SA$  となす角も  $\theta$  である。

ゆえに、上図より、 $\frac{g'}{g} = \frac{mg'}{mg} = \frac{1}{\cos \theta}$

(3)

$d \sin \theta$   
   $\sqrt{g'd \sin \theta \tan \theta}$   
   $2\pi \sqrt{\frac{d \cos \theta}{g'}}$

解説

車内の観測者から見ると、

点 A から車内の観測者から見て速さ  $u$  で電車の進行方向に押し出した小物体は、

小物体は見かけの重力  $mg'$  (遠心力  $\frac{mV^2}{R}$  と真の重力  $mg$  の合力) の下、

向心力  $T' \sin \theta$  ( $T'$  は糸の張力)

軌道半径  $d \sin \theta$    . . .

速さ  $u$  の等速円運動 (等速円錐振り子運動) をする。

小物体の円運動の中心方向の運動方程式は

$$T' \sin \theta = \frac{mu^2}{d \sin \theta} \quad \therefore u = \sqrt{\frac{d \sin^2 \theta}{m} \cdot T'} \quad \dots \textcircled{1}$$

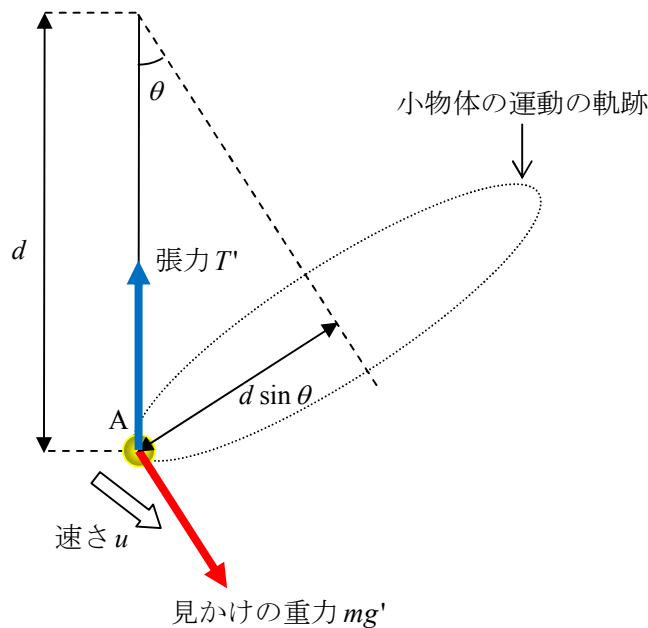
小物体に働く見かけの重力方向の力のつり合いより、

$$T' \cos \theta = mg' \quad \therefore T' = \frac{mg'}{\cos \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, 速さ } u = \sqrt{\frac{d \sin^2 \theta}{m} \cdot \frac{mg'}{\cos \theta}} = \sqrt{g'd \sin \theta \tan \theta} \quad \dots \textcircled{\text{カ}}$$

これより、その等速円運動の周期は

$$\frac{2\pi d \sin \theta}{u} = 2\pi \sqrt{\frac{d^2 \sin^2 \theta}{g'd \sin \theta \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{d \cos \theta}{g'}} \quad \dots \textcircled{\text{キ}}$$

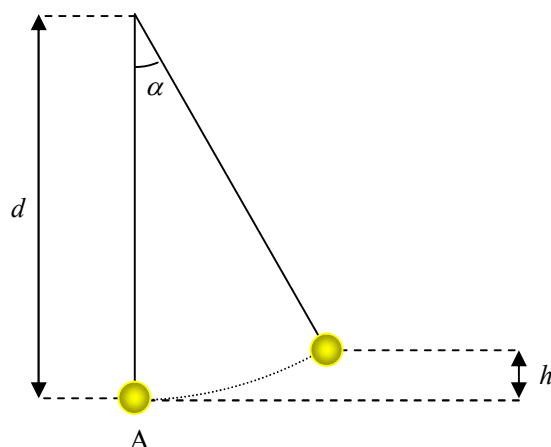


(4)

$\frac{u^2}{2g}$    
   $1 - \frac{1}{2} \tan^2 \theta$    
  1

解説

等速度運動になるから、見かけの重力  $mg'$  が消失し、車内は真の重力  $mg$  の世界に戻る。  
 小物体は点 A で円運動を止め、速さ  $u$  で単振り子運動をはじめめる。



電車の運動は等速度運動に変わるから、電車内の系は慣性系となる。  
 よって、電車内においても力学的エネルギー保存則が成り立つ。

したがって、 $mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} mu^2 \quad \therefore h = \frac{u^2}{2g} \quad \dots \text{ク}$

$h = d(1 - \cos \alpha)$ ,  $h = \frac{u^2}{2g}$  より、 $d(1 - \cos \alpha) = \frac{u^2}{2g}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos \alpha &= 1 - \frac{u^2}{2dg} \\
 &= 1 - \frac{g' d \sin \theta \tan \theta}{2dg} \\
 &= 1 - \frac{g'}{g} \cdot \frac{\sin \theta \tan \theta}{2} \\
 &= 1 - \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta \tan \theta}{2} \\
 &= 1 - \frac{\tan^2 \theta}{2} \quad \dots \text{ク}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha$  も  $\theta$  も十分小さいから、 $\cos \alpha = 1 - \frac{\tan^2 \theta}{2} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

これと  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  より、 $1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \therefore \alpha \approx \theta = 1 \times \theta$

ゆえに、1  $\dots$

## 補足

等加速度運動をする車内における慣性力による力学的エネルギー保存則

(非慣性系の力学的エネルギー保存則)

車内の観測者から見ると、

電車が等加速度  $a$  で運動を始めたとき、

車内で静止している小物体は  $-ma$  の慣性力を受け、運動を開始する。

このときの小物体の加速度を  $\alpha$  とすると、運動方程式は  $m\alpha = -ma$  だから、 $\alpha = -a$

よって、電車が等加速度運動を始めた時刻を  $t$  とすると、

小物体の速度： $-at$

小物体の変位： $-\frac{1}{2}at^2$

慣性力が小物体にした仕事： $|-ma| \left| -\frac{1}{2}at^2 \right| \cos 0 = \frac{1}{2}m(at)^2$

慣性力が小物体にした仕事を小物体が失った慣性力の位置エネルギーと解釈すると、

時刻	運動エネルギー	慣性力の位置エネルギー	非慣性系の力学的エネルギー
0	0	$\frac{1}{2}m(at)^2$	$\frac{1}{2}m(at)^2$
$t$	$\frac{1}{2}m(at)^2$	0	$\frac{1}{2}m(at)^2$

これより、慣性力がした仕事を慣性力の位置エネルギーの減少と解釈することにより、

つまり、慣性力を保存力と同等に扱うことにより、非慣性系においても力学的エネルギー保存則の式を立てることができる。

補足：コリオリの力

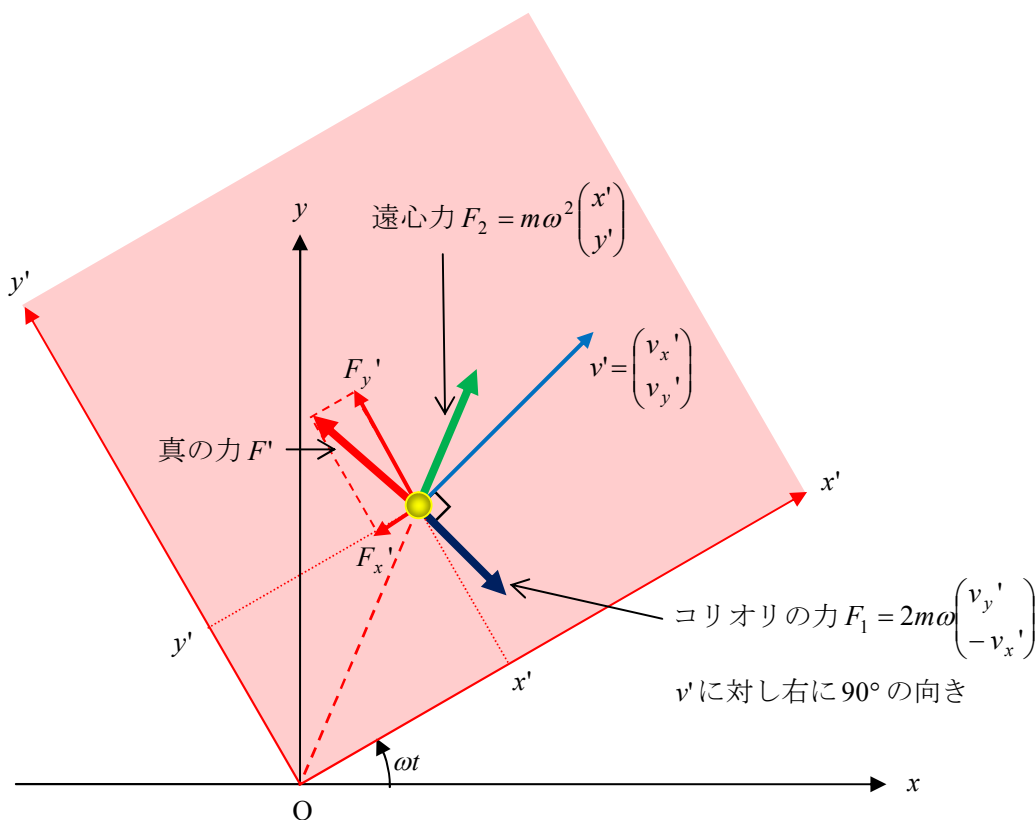
(2)

「小物体が車内の観測者から見て動いているときでも、その速さが  $V$  に比べてじゅうぶん小さければ、短い間に電車の加速度運動（等速円運動）が小物体に及ぼす影響は、大きさ  $m \frac{V^2}{R}$  の遠心力のみあらわれると近似的に考えることができる。」

のは、角速度  $\omega$  で回転運動している系において速さ  $v$  で運動している質量  $m$  の物体には、2つの慣性力が働く。

1つは大きさ  $m r \omega^2$  の遠心力で1つは大きさ  $2m \omega v$  のコリオリの力である。コリオリの力の大きさは物体の速さに比例するので、物体の速さが十分小さいならば、これを無視できる。

回転系の中で観測される力



北極を中心とすると、北半球は反時計回り ( $\omega > 0$ ) の回転系である。  
したがって、北半球上では、物体の運動、水の流れ、空気の流れなどあらゆる運動がその運動の向きに対し右向き of 力を受ける。  
この理屈でいえば、まっすぐ歩いているのに右足の負担が大きい、車は右側のタイヤがすりへりやすい、川は下流に向かって右岸が削られやすい等ということになる。  
また、コリオリの力の大きさは回転系における質点の速度の大きさに比例するから、台風など風速の大きい風は、大きく右へ曲げられ渦になる。  
気象衛星は静止衛星だから、回転系（地球）で静止している観測者と同じである。  
したがって、気象衛星が撮った台風は雲が渦を描いたものとなる。

## 物理問題 II

(1)

イ  $quB$

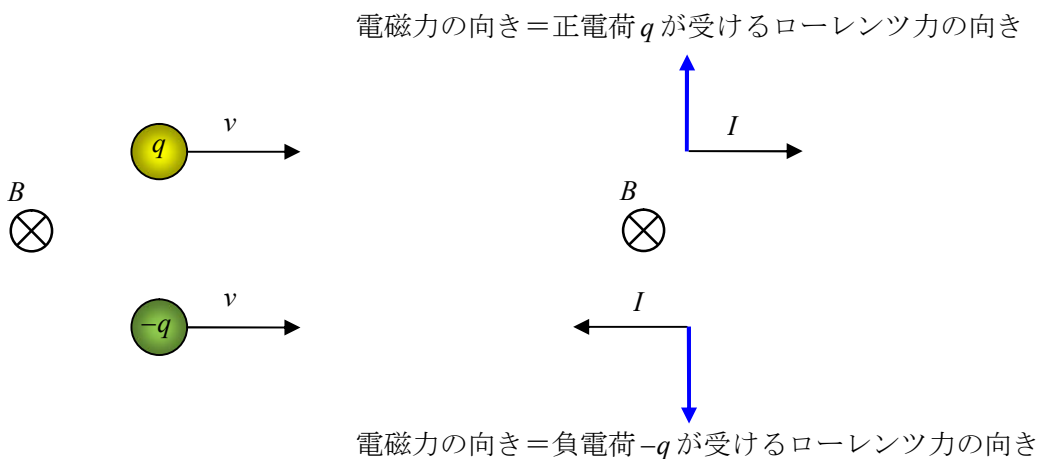
解説

電荷  $q$  は右向きに速さ  $v$  と 導体棒手前から奥へ速さ  $u$  で移動しているから、  
 電荷が受けるローレンツ力は  $qvB$  (導体棒に平行) と  $quB$  (レールに平行) の合力である。  
 ところが、 $u \gg v$  より、 $quB \gg qvB$  となるため、 $qvB$  は無視できるので、  
 電荷は磁場からレールと平行に  $quB$  の力を受けるとしてよい。  
 また、問題文に「レールと平行右向きに」とあるから  $q$  は正電荷である。

補足

ローレンツ力の向きとフレミング左手の法則

電荷の移動を電流に置き換えると、  
 電流の向きは正電荷  $q$  の移動の向きと同じで、負電荷  $-q$  の移動の向きと逆だから、  
 電磁力はそれぞれ下図青色矢印の向きとなる。  
 この向きが、それぞれの電荷が受けるローレンツ力の向きである。



ロ  $qBl$

解説

荷電粒子は、ローレンツ力  $f = quB$  を受けながら、レールの接点間を時間  $t = \frac{l}{u}$  かけて

移動するから、荷電粒子が受ける力積  $f \cdot t = quB \cdot \frac{l}{u} = qBl$

よって、導体棒がこの荷電粒子を通じて受ける力積も  $qBl$

$$\square \frac{m}{Bl}$$

## 解説

導体棒を流れた電荷が  $q$  のとき導体棒が受ける力積は  $\square$  より  $qBl$  である。  
したがって、導体棒を流れた電荷が  $Q$  のとき導体棒が受ける力積は  $QBl$   
また、このとき導体棒の運動量変化は  $mv$

$$\text{よって, } mv = QBl \quad \therefore Q = \frac{m}{Bl} \times v$$

$$\square \quad -\frac{m}{B^2 l^2}$$

## 解説

$$Q = \frac{mv}{Bl} \text{ より, } v = \frac{QBl}{m}$$

$$\therefore |V| = vBl = \frac{QBl}{m} \cdot Bl = \frac{Q}{\frac{m}{B^2 l^2}}$$

導体棒がレールを右向きに移動するので、正電荷  $q$  もその向きの速度成分をもつ。  
したがって、正電荷は導体棒奥から手前の向きにローレンツ力を受け、  
端子 1a へ移動する。

よって、端子 1a の電位 > 端子 1b の電位。すなわち  $V < 0$

$$\text{ゆえに, } V = \frac{Q}{-\frac{m}{B^2 l^2}}$$

## 補足

電荷  $q$  の導体棒手前から奥への移動により生じるローレンツ力の向きは  $\square$  で解説したように導体棒と垂直なので、導体棒中の電荷の移動に影響しない。



(2)

$$\boxed{\text{ホ}} \frac{E}{Bl} \quad \boxed{\text{ク}} \frac{E - vBl}{R}$$

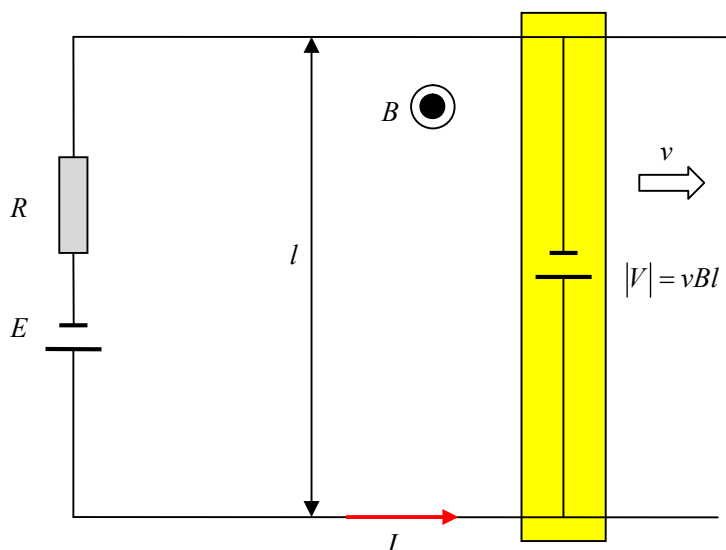
解説

導体棒の右向き速度が  $v$  のとき、  
 導体棒には直流電源の起電力の向きと逆向きに大きさ  $vBl$  の誘導起電力が生じている。  
 よって、回路全体の起電力の大きさ  $= E - vBl$

これより、導体棒を流れる電流  $I = \frac{E - vBl}{R} \dots \boxed{\text{ク}}$

導体棒は電磁力を受けて加速されるから、それが速度  $v_1$  の等速度運動になることは、  
 受ける電磁力が 0 になること、すなわち導体棒を流れる電流が 0 になることを意味する。

よって、 $E - v_1Bl = 0$  より、 $v_1 = \frac{E}{Bl} \dots \boxed{\text{ホ}}$



## 問 1

スイッチ a を右にたおした直後 ( $t=0$ ) の直流電源の仕事率を  $P_0$ ,  
 直流電源の仕事率を  $P_E$ , 抵抗における消費電力を  $P_R$ , 導体棒に働く力の仕事率を  $P_m$  とすると,  
 解答欄に表すべきそれぞれの時間変化のグラフは  $\frac{P_E}{P_0}$ ,  $\frac{P_R}{P_0}$ ,  $\frac{P_m}{P_0}$  となる。

$$\text{速度 } v_1 \text{ のとき } E = v_1 Bl, \quad P_0 = \frac{E^2}{R}$$

$$\begin{aligned} P_E &= IE \\ &= \frac{E - vBl}{R} \cdot E \\ &= \frac{E(E - vBl)}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_R &= I^2 R \\ &= \left( \frac{E - vBl}{R} \right)^2 R \\ &= \frac{(E - vBl)^2}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_m &= f v \\ &= IBlv \\ &= \frac{E - vBl}{R} \cdot Blv \\ &= \frac{(E - vBl)Blv}{R} \end{aligned}$$

より,

直流電源の仕事率の時間変化のグラフ

$$\begin{aligned} \frac{P_E}{P_0} &= \frac{E(E - vBl)}{E^2} \\ &= \frac{E - vBl}{E} \\ &= 1 - \frac{vBl}{v_1 Bl} \\ &= 1 - \frac{v}{v_1} \end{aligned}$$

これと図 3 のグラフより,  $\left( \frac{t}{T_0}, \frac{P_E}{P_0} \right) = (0, 1), (1, 0.5), (2, 0.25)$  を通る曲線となる。

抵抗における消費電力の時間変化のグラフ

$$\begin{aligned}\frac{P_R}{P_0} &= \frac{(E - vBl)^2}{E^2} \\ &= \left(\frac{E - vBl}{E}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{v}{v_1}\right)^2\end{aligned}$$

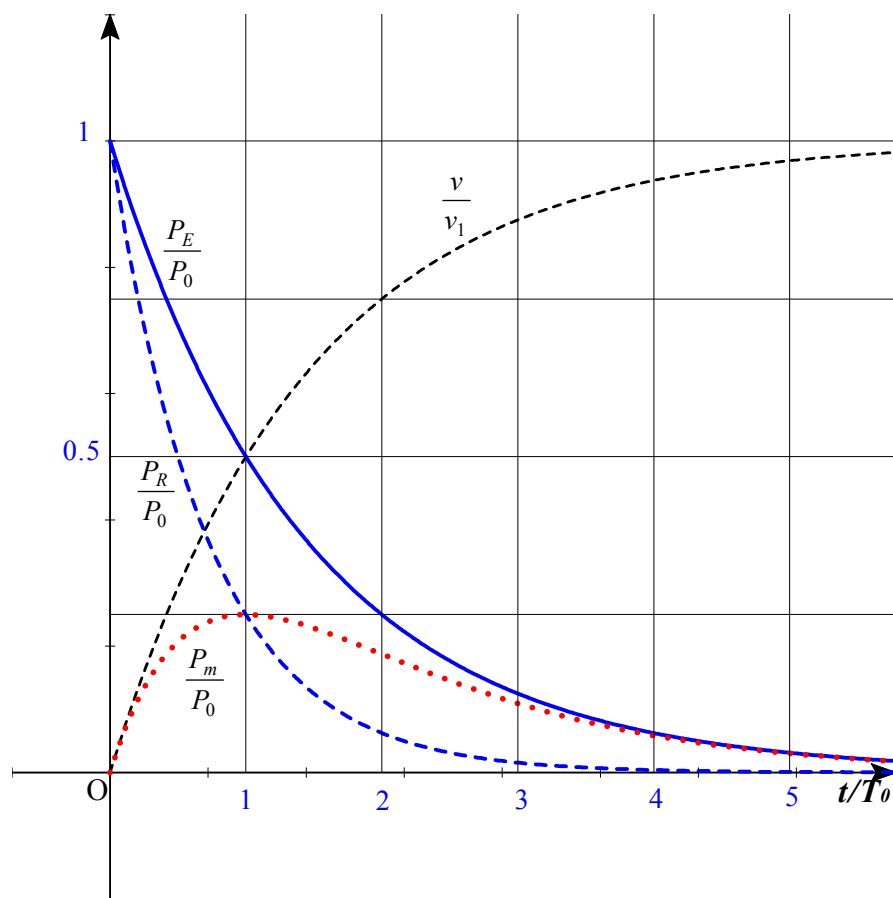
これと図 3 のグラフより,  $\left(\frac{t}{T_0}, \frac{P_R}{P_0}\right) = (0, 1), (1, 0.25), (2, 0.0625)$  を通る曲線となる。

導体棒に働く力の仕事率の時間変化のグラフ

$$\begin{aligned}\frac{P_m}{P_0} &= \frac{(E - vBl)vBl}{E^2} \\ &= \frac{(v_1Bl - vBl)vBl}{v_1^2 B^2 l^2} \\ &= \frac{-v^2 + v_1v}{v_1^2} \\ &= -\left(\frac{v}{v_1}\right)^2 + \frac{v}{v_1} \\ &= -\left(\frac{v}{v_1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

これと図 3 のグラフより,  $\left(\frac{t}{T_0}, \frac{P_m}{P_0}\right) = (1, 0.25)$  を極大点とし,

$\left(\frac{t}{T_0}, \frac{P_m}{P_0}\right) = (0, 0), (2, 0.19)$  を通る曲線 (赤色破線) となる。



補足 図 3 の曲線の方程式を求めてみよう。

$$\text{キルヒホッフの第 2 法則より, } RI = E - vBl \quad \therefore I = \frac{E - vBl}{R}$$

$$\text{これより, 導体棒が受ける電磁力 } F = IBl = \frac{E - vBl}{R} \cdot Bl$$

$$\text{したがって, 導体棒の運動方程式は } m \frac{dv}{dt} = \frac{Bl}{R} (E - vBl) \quad \therefore \frac{dv}{E - vBl} = \frac{Bl}{mR} dt$$

続いて, 微分方程式  $\frac{dv}{E - vBl} = \frac{Bl}{mR} dt$  を解いてみる。

$$\int \frac{dv}{E - vBl} = \int \frac{Bl}{mR} dt \text{ より, 積分定数を } \alpha \text{ とすると, } -\log|E - vBl| = \frac{Bl}{mR} t + \alpha$$

$$E > vBl \text{ より, } -\log(E - vBl) = \frac{Bl}{mR} t + \alpha \quad \therefore E - vBl = e^{-\frac{Bl}{mR} t} \cdot e^{-\alpha}$$

ここで,  $t=0$  のとき  $v=0$  より,  $E = e^{-\alpha}$

$$\text{よって, } E - vBl = e^{-\frac{Bl}{mR} t} \cdot E \quad \therefore v = \frac{E}{Bl} \left( 1 - e^{-\frac{Bl}{mR} t} \right)$$

$$\text{これと } v_1 = \frac{E}{Bl} \text{ より, } v = v_1 \left( 1 - e^{-\frac{Bl}{mR} t} \right) \quad \therefore \frac{v}{v_1} = 1 - e^{-\frac{Bl}{mR} t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } t = T_0 \text{ のとき, } \frac{v}{v_1} = \frac{\frac{v_1}{2}}{v_1} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{Bl}{mR} T_0}$$

$$\text{よって, } e^{-\frac{Bl}{mR} T_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left( e^{-\frac{Bl}{mR} T_0} \right)^{\frac{1}{T_0}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{T_0}} \Leftrightarrow e^{-\frac{Bl}{mR}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{T_0}} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入することにより, 図 3 の曲線の式  $\frac{v}{v_1} = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_0}}$  が得られる。

$$\text{また, これより, } \frac{P_E}{P_0} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_0}}, \quad \frac{P_R}{P_0} = \left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{t}{T_0}}, \quad \frac{P_m}{P_0} = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_0} - 1} \right\} + \frac{1}{4}$$

(3)

$$\boxed{\text{ト}} \frac{mC}{CB^2l^2 + m} E \quad \boxed{\text{チ}} \frac{CBl}{CB^2l^2 + m} E$$

解説

等速度運動になった後の導体棒の速度を  $v_2$  ,  
 コンデンサーに蓄えられている電荷を  $Q_C (> 0)$  すると,

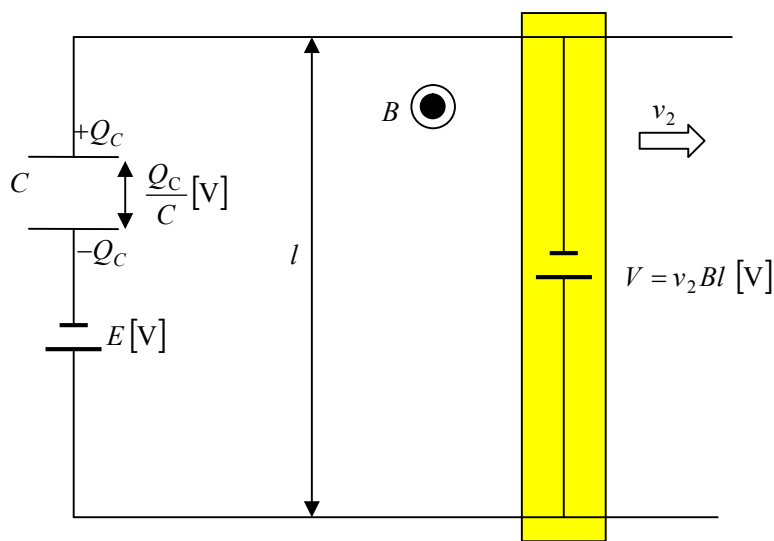
$$\text{回路に電流が流れないから, } E = v_2 Bl + \frac{Q_C}{C} \quad \dots \textcircled{3}$$

コンデンサーには導体棒を移動した電荷が蓄えられているから,

$$\boxed{\text{ハ}} \text{より, } Q_C = \frac{mv_2}{Bl} \quad \therefore v_2 = \frac{BlQ_C}{m} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より, } E = \frac{CB^2l^2 + m}{mC} \cdot Q_C \quad \therefore Q_C = \frac{mC}{CB^2l^2 + m} E \quad \dots \boxed{\text{ト}}$$

$$\text{これと}\textcircled{4}\text{より, } v_2 = \frac{CBl}{CB^2l^2 + m} E \quad \dots \boxed{\text{チ}}$$



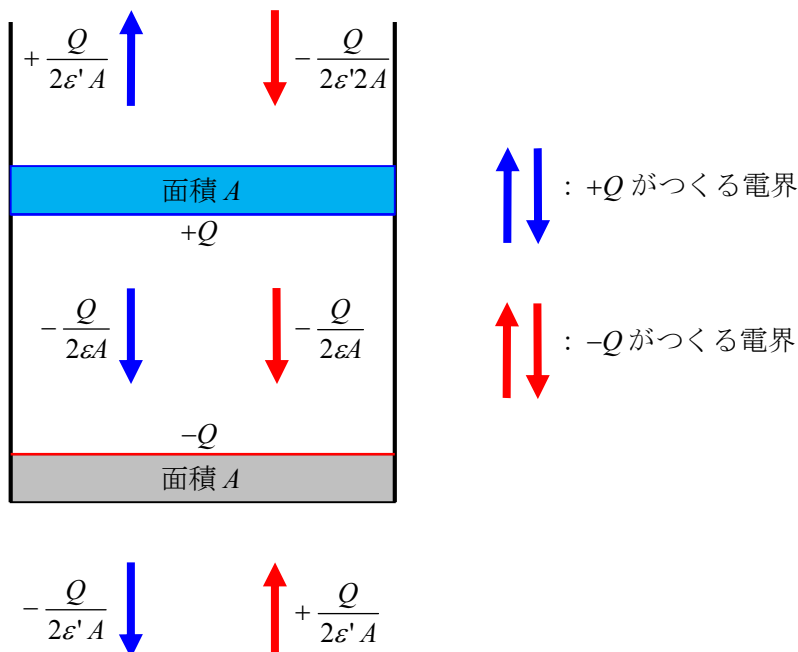
十分時間が経つと, 回路を流れる電流が 0 になるから, 抵抗  $R$  は導線扱い。

物理問題 III

(1)

あ  $-\frac{Q}{\epsilon A}$    
 い  $-\frac{Q^2}{2\epsilon A}$

解説



静電気力により、電荷  $+Q$  はピストン板の下面に、電荷  $-Q$  は底板の上面に分布し、それぞれの板の電荷は板の上下方向に電界をつくるから、

ピストン板の電荷  $+Q$  のうち、 $+\frac{Q}{2}$  は上方向、 $+\frac{Q}{2}$  下方向に電界を、

底板の電荷  $-Q$  のうち、 $-\frac{Q}{2}$  は上方向、 $-\frac{Q}{2}$  下方向に電界をつくるとしてよい。

これと両板間の誘電率が  $\epsilon$ 、底面積が  $A$  であることから、

各板上の電荷が両板間につくる電界の強さと向きはいずれも  $\frac{Q}{\epsilon \cdot A} = \frac{Q}{2\epsilon \cdot A}$  で負。

よって、両板間につくられる電界は、 $-\frac{Q}{\epsilon \cdot 2A} + \left(-\frac{Q}{\epsilon \cdot 2A}\right) = -\frac{Q}{\epsilon \cdot A}$  ... あ

ピストン板の電荷  $+Q$  は底板がつくる電界  $-\frac{Q}{2\epsilon A}$  の作用を受けるから、

ピストン板が受ける静電気力は、 $-Q \times \frac{Q}{2\epsilon A} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A}$  ... い

(2)

$$\boxed{5} \quad PA + Mg - \frac{nRT}{z} + \frac{\epsilon AV^2}{2z^2}$$

解説

ピストン板の電荷を  $Q'$  ( $> 0$ ) とすると、両板間の距離は  $z$  だから、

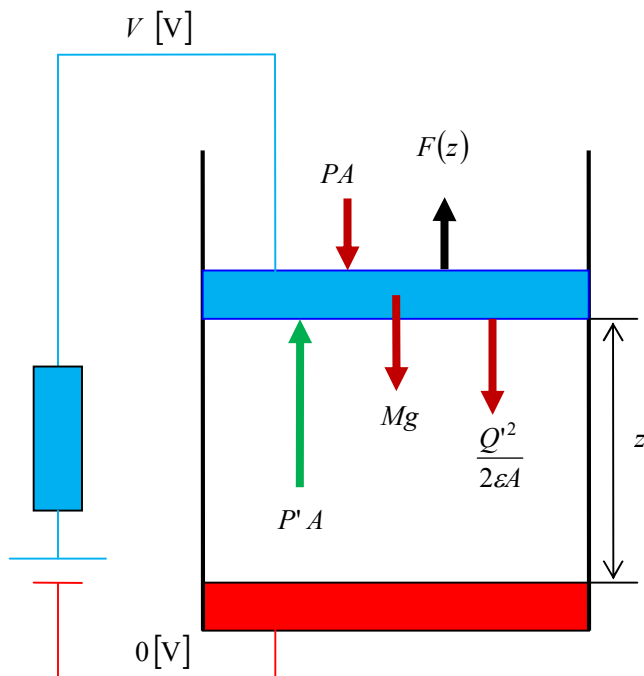
ピストン板が底板から受ける静電気力の大きさは  $\frac{Q'^2}{2\epsilon A}$

シリンダー内の気体の圧力を  $P'$  とすると、

ピストン板がシリンダー内の気体から受ける力の大きさは  $P' A$

ピストン板が大気および地球から受ける力の大きさはそれぞれ  $PA$  と  $Mg$

よって、ピストン板に働く力を図示すると、次のようになる。



上向きを正とすることとピストン板に働く力のつり合いより、

$$F(Z) + P' A - PA - Mg - \frac{Q'^2}{2\epsilon A} = 0 \quad \therefore F(Z) = PA + Mg + \frac{Q'^2}{2\epsilon A} - P' A$$

ここで、

$$\text{ピストン板と底板は電気容量が } \frac{\epsilon A}{z} \text{ のコンデンサーだから } Q' = \frac{\epsilon A}{z} V \quad \therefore \frac{Q'^2}{2\epsilon A} = \frac{\epsilon AV^2}{2z^2}$$

$$\text{また、理想気体の状態方程式より } P' Az = nRT \quad \therefore P' A = \frac{nRT}{z}$$

$$\text{ゆえに、} F(z) = PA + Mg + \frac{\epsilon AV^2}{2z^2} - \frac{nRT}{z}$$



$$\boxed{\text{え}} \quad \frac{nRT}{\sqrt{2\varepsilon A(PA + Mg)}}$$

解説

$$\begin{aligned} F(z) &= PA + Mg + \frac{\varepsilon AV^2}{2z^2} - \frac{nRT}{z} \\ &= \frac{2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2}{2z^2} \end{aligned}$$

$z \neq 0$  より,  $F(z) = 0$  が異なる正の 2 実数解  $z = a_+, a_-$  をもつためには,  
 $2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2 = 0$  が 0 でない異なる正の 2 実数解  $a_+, a_-$  をもてばよい。  
 また,  $2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2 = 0$  の解が  $z = 0$  でないことは,  $z = 0$  とすると,  
 $2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2 = 0$  の左辺が  $-\varepsilon AV^2$  となることから保証される。  
 さらに, 実数解をもつならば, それは正であることが, 解と係数より保証される。  
 したがって,  $2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2 = 0$  の判別式が正であればよい。  
 よって, 判別式を  $D$  とすると,

$$\frac{D}{4} = (nRT)^2 - 2(PA + Mg)\varepsilon AV^2 > 0 \text{ より, } V^2 < \frac{(nRT)^2}{2\varepsilon A(PA + Mg)}$$

$$\text{ゆえに, } V \text{ の閾値 } V_c = \frac{nRT}{\sqrt{2\varepsilon A(PA + Mg)}}$$

$$\boxed{\text{お}} \quad \frac{nRT}{PA + Mg}$$

解説

帯電していないならば, 両板間の電界が 0 だから,  $V = 0$   
 よって,

$$\begin{aligned} F(z) &= PA + Mg + \frac{\varepsilon AV^2}{2z^2} - \frac{nRT}{z} \\ &= PA + Mg - \frac{nRT}{z} \end{aligned}$$

$$F(a_0) = 0 \text{ より, } PA + Mg - \frac{nRT}{a_0} = 0 \quad \therefore a_0 = \frac{nRT}{PA + Mg}$$

$$\boxed{か} \frac{a_0}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_c^2}} \right) \quad \boxed{き} \frac{a_0}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_c^2}} \right)$$

解説

$$F(z) = \frac{2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2}{2z^2} = 0 \text{ より, } 2(PA + Mg)z^2 - 2nRTz + \varepsilon AV^2 = 0$$

$$\therefore (PA + Mg) \left( 2z^2 - 2 \cdot \frac{nRT}{PA + Mg} z + \frac{\varepsilon AV^2}{PA + Mg} \right) = 0$$

$$\text{ゆえに, } 2z^2 - 2 \cdot \frac{nRT}{PA + Mg} z + \frac{\varepsilon AV^2}{PA + Mg} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで, } \frac{nRT}{PA + Mg} = a_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } V_c = \frac{nRT}{\sqrt{2\varepsilon A(PA + Mg)}}, \quad nRT = a_0(PA + Mg) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{a_0(PA + Mg)}{\sqrt{2\varepsilon A(PA + Mg)}} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{PA + Mg}{\varepsilon A}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\varepsilon A}{PA + Mg} = \frac{a_0^2}{2V_c^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } 2z^2 - 2a_0z + \frac{a_0^2 V^2}{2V_c^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - \frac{a_0^2 V^2}{V_c^2}}}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_c^2}} \right) \end{aligned}$$

問 1

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{\varepsilon AV^2}{2z^2} - \frac{nRT}{z} + PA + Mg \\
 &= \frac{\varepsilon AV^2 - 2nRTz + 2z^2(PA + Mg)}{2z^2} \\
 &= \frac{PA + Mg}{z^2} \left\{ z^2 - \frac{nRT}{PA + Mg} z + \frac{\varepsilon AV^2}{2(PA + Mg)} \right\}
 \end{aligned}$$

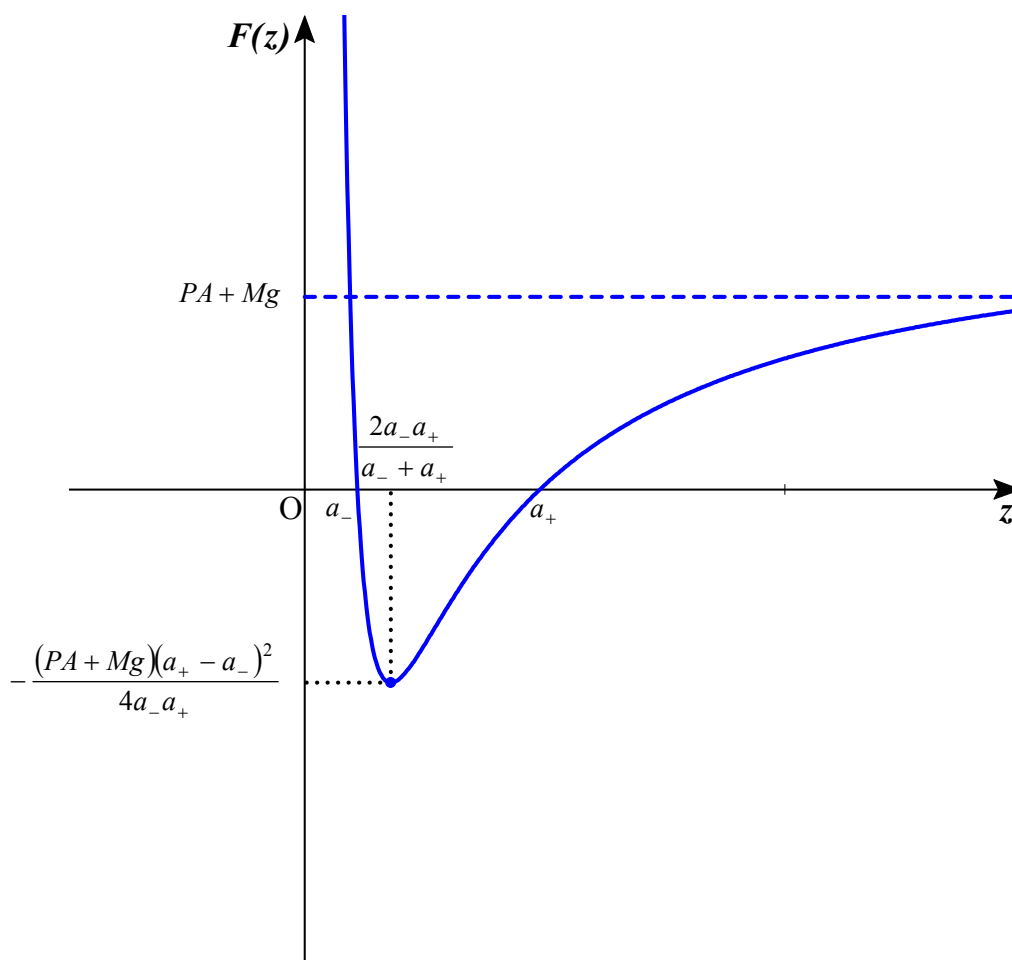
において、 $z^2 - \frac{nRT}{PA + Mg} z + \frac{\varepsilon AV^2}{2(PA + Mg)} = 0$  の解は、 $a_-, a_+$  ( $a_+ > a_-$ ) だから、

$$z^2 - \frac{nRT}{PA + Mg} z + \frac{\varepsilon AV^2}{2(PA + Mg)} = (z - a_-)(z - a_+)$$

よって、 $F(z) = \frac{PA + Mg}{z^2} (z - a_-)(z - a_+)$

これと  $F'(z) = \frac{(PA + Mg)(a_- + a_+)}{z^3} \left( z - \frac{2a_- a_+}{a_- + a_+} \right)$  および  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = PA + Mg$ ,  $\lim_{z \rightarrow +0} F(z) = \infty$

から次図となる。



## 問 2

(A) ① (B) ③ (C) ①

## 解説

外力  $F(z) > 0$  のとき

ピストン板を鉛直上向きに引くことでピストン板の静止状態を保っているから、その外力を除くとピストン板は鉛直下向きに移動する。

外力  $F(z) < 0$  のとき

ピストン板を鉛直下向きに押すことでピストン板の静止状態を保っているから、その外力を除くとピストン板は鉛直上向きに移動する。

(A), (C) の場合は、それぞれ、 $z < a_-, a_+ < z$  だから、 $F(z) > 0$ (B) の場合は、 $a_- < z < a_+$  だから、 $F(z) < 0$ 

## 問 3

$$F(z) = \frac{1}{2z^2} \{2(PA + Mg) \cdot z^2 - 2nRT \cdot z + \epsilon AV^2\}$$
 において、

$2(PA + Mg) \cdot z^2 - 2nRT \cdot z + \epsilon AV^2 = 0$  を満たす実数解がないことと  $(PA + Mg) > 0$  より、常に  $F(z) > 0$  である。

よって、ピストンを静止させるための外力は常に鉛直上向き。

ゆえに、ピストン板から手を離すと  $z$  の値に関係なくピストン板は鉛直下向きに移動する。